УДК 621.7

В. А. ГРИНКЕВИЧ

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Одной из главных проблем при решении краевых пластических задач является учет физической нелинейности деформируемых сред. На практике он сводится к применению различных итеративных процедур, таких как метод упругих решений, метод гидродинамических приближений, метод дополнительных напряжений и т.п. Ранее было сформулировано утверждение, гласящее, что для краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями существует разрешающая система уравнений, линейная относительно неизвестных данной задачи. Это позволяет не использовать итерационные вычислительные процедуры. Представляется, что данное утверждение применимо в тех случаях, когда граничные условия краевой жесткопластической задачи будут отличаться от граничных условий аналогичной линейно-вязкой задачи. Очевидно, что данное утверждение будет справедливым и в случае краевых упругопластических задач. Далее сделана попытка доказать однозначную определимость (детерминированность) вычисления компонентов тензора напряжений в рамках решения краевой жесткопластической задачи. Было сформулировано и доказано следующее утверждение: для любой краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями компоненты тензора напряжений однозначно определяются в любой точке тела в смысле нижней и верхней оценки. Сформулированы замечания, определяющие границы его применимости. Кроме того, было сформулировано еще одно утверждение: для любой краевой пластической задачи с корректно заданными граничными условиями и произвольной реологической зависимостью компоненты тензора напряжений и вектора перемещений (скоростей) однозначно определяются в любой точке тела в смысле нижней и верхней оценки. Произвольная реологическая зависимость означает, что интенсивность касательных напряжений является произвольной функцией материала (включая анизотропию), температуры, степени накопленной деформации сдвига, интенсивности деформации сдвига, интенсивности скоростей деформации сдвига. Приведенные выше утверждения позволяют обойти проблему существенной физической нелинейности деформируемых сред. Это позволяет линеаризовать краевую пластическую задачу.

Ключевые слова: краевая задача, граничные условия, скорость, напряжения.

В. О. ГРИНКЕВИЧ

ПРО РОЗВ’ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЖОРСТКО-ПЛАСТИЧНИХ ЗАДАЧ

Однією з головних проблем при розв’язанні крайових пластичних задач є врахування фізичної нелінійності деформованого середовища. На практиці вона зводиться до застосування різних ітеративних процедур, таких як метод пружних рішень, метод гідродинамічних наближень, метод додаткових напружень і т.п. Раніше було сформульовано твердження, з якого випливає, що для крайової жорстко-пластичної задачі з коректно заданими граничними умовами існує розв’язуюча система рівнянь, що лінійна відносно невідомих даної задачі. Це дозволяє не використовувати ітераційні обчислювальні процедури. Дане твердження можна застосувати в тих випадках, коли граничні умови крайової жорстко-пластичної задачі будуть відрізнятися від граничних умов аналогічної жорстко-пластичної задачі. Очевидно, що дане твердження буде справедливим і у випадку крайових пружно-пластичних задач. Далі зроблена спроба довести однозначну визначність (детермінованість) обчислення компонентів тензора напружень в рамках рішення крайової жорстко-пластичної задачі. Було сформульовано і доведено наступне твердження: для будь-якої крайової жорстко-пластичної задачі з коректно заданими граничними умовами компоненти тензора напружень однозначно визначаються в будь-якій точці тіла в сенсі нижньої і верхньої оцінки. Сформульовані зауваження, що визначають межі його застосовності. Крім того, було сформульовано ще одне твердження: для будь-якої крайової пластичної задачі з коректно заданими граничними умовами і довільною реологічною залежністю компоненти тензора напружень і вектора переміщень (швидкостей) однозначно визначаються в будь-якій точці тіла в сенсі нижньої і верхньої оцінки. Довільна реологічна залежність означає, що інтенсивність дотичних напружень є довільною функцією матеріалу (включаючи анізотропію), температури, ступеня накопиченої деформації зсуву, інтенсивності деформації зсуву, інтенсивності швидкостей деформації зсуву.
Наведені вище твердження дозволяють обійти проблему істотної фізичної нелінійності деформованих середовищ. Це дозволяє лінеаризувати крайову пластичну задачу.

Ключові слова: крайова задача, граничні умови, швидкості, напруження.

V. O. GRYNKEVICH

ABOUT SOLUTION OF RIGID-PLASTIC BOUNDARY PROBLEMS

One of the main problems in solving boundary plastic problems is to take into account the physical nonlinearity of deformable body. In practice, it comes down to the use of various iterative procedures, such as the method of elastic solutions, the method of hydrodynamic approximations, the method of additional stresses, etc. Earlier, a statement was formulated stating that for a boundary rigid-plastic problem with correctly defined boundary conditions, there exists a resolving system of equations that is linear with respect to the unknowns of this problem. This allows not to use iterative computing procedures. It seems that this statement is applicable in those cases where the boundary conditions of the boundary rigid-plastic problem differ from the boundary conditions of a similar linear-viscous problem. Obviously, this statement will also be valid in the case of boundary elastic-plastic problems. Next, an attempt has been made to prove that the calculation of the components of the stress tensor is uniquely definable (deterministic) in the framework of solving the boundary rigid-plastic problem. The following statement was formulated and proved: for any boundary rigid-plastic problem with correctly defined boundary conditions, the components of the stress tensor are uniquely determined at any point of the body in the sense of the lower and upper estimates. The comments defining the limits of its applicability are formulated. In addition, another statement was formulated: for any boundary plastic problem with correctly defined boundary conditions and arbitrary rheological dependence of the stress tensor component and displacement vector (velocities) are uniquely determined at any point in the body in the sense of the lower and upper estimates. Arbitrary rheological dependence means that the intensity of tangential stresses is an arbitrary function of the material (including anisotropy), temperature, degree of accumulated shear strain, intensity of shear strain, intensity of shear strain rates. The above statements allow us to circumvent the problem of substantial physical nonlinearity of deformable body. This allows you to linearize the boundary plastic problem.

Keywords: boundary value problem, boundary conditions, velocity, stress.

© В. А. Гринкевич, 2018

Введение. Одной из главных проблем при решении краевых пластических задач является учет физической нелинейности деформируемых сред. На практике он сводится к применению различных итеративных процедур, таких как метод упругих решений, метод гидродинамических приближений, метод дополнительных напряжений и т.п.

При этом, помимо прочих, возникают две проблемы. Первая заключается в том, что условие сходимости итеративных процедур удовлетворяется не всегда, особенно в случае метода дополнительных сил (напряжений). Вторая состоит в том, что каждая итерация требует больших вычислительных ресурсов при реализации численных методов на ЭВМ, в частности, метода конечных элементов или метода граничных элементов (в рамках методов упругих решений или гидродинамических приближений). Особенно остро эта проблема стоит при решении трехмерных задач, когда количество неизвестных достигает нескольких десятков тысяч. В связи с этим представляется целесообразным разработать подходы к решению краевых пластических задач, учитывающие указанные выше проблемы.

К решению краевых жесткопластических задач в рамках непрямой гранично-интегральной формулировки. Как уже говорилось выше, метод граничных интегральных уравнений изначально был предназначен для решения физически линейных задач. Однако существует возможность его адаптации и для задач с существенной физической нелинейностью, в частности, для задач обработки металлов давлением.

В рамках теории пластического течения Сен-Венана–Леви–Мизеса и непрямой формулировки метода граничных интегральных уравнений мы можем представить себе воображаемое линейно-вязкое тело, для которого объемные силы и внешние фиктивные нагрузки модифицированы таким образом, что поле скоростей, полученное при решении краевой задачи, будет соответствовать реальному телу с заданной реологической зависимостью. Обычно эти модифицированные нагрузки подбираются путем последовательных приближений в рамках методов дополнительных сил (напряжений).

Поэтому целесообразно было бы сформулировать краевую задачу таким образом, чтобы исключить применение итерационных процедур. Для этого необходимо получить разрешающую систему уравнений, линейных относительно неизвестных краевой задачи.

Сформулируем следующее утверждение [1].

Теорема 1. ***Для краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями существует разрешающая система уравнений, линейная относительно неизвестных данной задачи.***

Доказательство. Как известно, краевая задача линейной упругости (вязкости) может быть корректно сформулирована в виде системы граничных интегральных уравнений:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV\quad, \qquad (1)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ik}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V T_{ik}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV\quad. \qquad (2)$$

Переход к физически нелинейной краевой задаче производится путем добавления поля фиктивных объемных сил, $F_k^{*доп.}(E,\tau)$, распределенных таким образом, чтобы напряженно-деформированное состояние в любой точке тела V соответствовало реальной жесткопластической среде с заданными реологическими свойствами, т. е. чтобы выполнялось также и уравнение связи:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)F_k^{*доп.}(E,\tau)dV\quad, \qquad (3)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F\ (E,\tau)dV+\int_V T_{ij}(x,\tau)F_k^{*доп.}(E,\tau)dV\quad. \qquad (4)$$

В уравнениях (3) и (4) неизвестными являются распределение интенсивности фиктивных нагрузок $t_k^*(E,\tau)$ на поверхности S и распределение интенсивности фиктивных дополнительных объемных сил $F_k^{*доп.}(E,\tau)$ внутри V.

Если известно распределение $F_k^{*доп.}(E,\tau)$, и корректно заданы (т.е. точно известны) граничные условия, то уравнения (3) и (4) определяют решение любой корректно поставленной краевой жесткопластической задачи.

Таким образом, проведена непрямая формулировка краевой жесткопластической задачи в виде граничных интегральных уравнений. Интегральные уравнения (3) и (4) в общем случае являются нелинейными вследствие нелинейности реологических свойств жесткопластической среды.

Дополнительно приложим к телу две равномерно распределенные объемные силы, имеющие одинаковую плотность распределения С и противоположные по знаку. Тогда имеем:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C-C)dV \quad , (5)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+$$
$$+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$+\int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C-C)dV \quad . (6)$$

В силу аддитивности определенного интеграла:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$+\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$+\int_V V_{ij}(x,E,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-$$
$$-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV \quad (7)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+$$
$$+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$\int_V T_{ij}(x,\tau)(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV \quad . (8)$$

Предположим, что плотность С такова, что заведомо обеспечивается неизменность (положительность) знака $(F_k^{*доп.}(\tau)+C)$. Заметим также, что для сингулярных функций (функций влияния) существует интеграл в смысле главного значения Коши. Тогда условия обобщенной теоремы о среднем будут выполнены и выражения (7) и (8) преобразовываются к виду:

$$V_i(x_0,\tau)=\int_S V_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$\int_V V_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$+V_{ij}^{ср.}(x,E,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V V_{ij}(x,E,\tau)C)dV \quad , (9)$$

$$t_i(x_0,\tau)=\frac{1}{2}\delta_{ik}t_k^*(x_0,\tau)+$$
$$+\int_S T_{ij}(x_0,E,\tau)t_k^*(E,\tau)dS+$$
$$+\int_V T_{ij}(x_0,E,\tau)F_k(E,\tau)dV+$$
$$+T_{ij}^{ср.}(x,\tau)\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V T_{ij}(x,\tau)CdV \quad . (10)$$

Добавим к последним уравнениям условие глобального равновесия, которое в данном случае в этом случае принимает следующий вид:

$$\int_S t_k^*(E,\tau)dS+\int_V F_k(E,\tau)dV+$$
$$+\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV-\int_V CdV=0 \quad . (11)$$

Таким образом, получена разрешающая система уравнений, линейная относительно фиктивных нагрузок на поверхности тела неизвестных краевой задачи, и величины – $\int_V(F_k^{*доп.}(\tau)+C)dV$, которая является компонентой равнодействующей дополнительных объемных сил с точностью до постоянной.

Условия теоремы выполнены**.**

Замечание 1. Объемные интегралы в (9) и (10) имеют ясный *физический смысл*: они представляют собой влияние проекции равнодействующей дополнительной объемной силы на заданные граничные значения проекций скоростей и напряжений. При этом та часть, которая осталась под знаком интеграла является собственно проекцией равнодействующей **+ С**; величина, вынесенная за знак интеграла – это функция влияния кельвиновской силы с точкой приложения, совпадающей с точкой приложения равнодействующей.

Замечание 2. Строго говоря, обобщенная теорема о среднем определенного интеграла доказывает только существование величины, выносимой за знак интеграла, значение ее неизвестно. В данном случае физический смысл этого положения такой: точка приложения равнодействующей дополнительной объемной силы заранее неизвестна.

Приведем следующие физические рассуждения. Очевидно, что для любого линейно-вязкого тела при помощи наложения соответствующего поля объемных сил можно получить решение жесткопластической краевой задачи в смысле удовлетворения условиям равновесия тела и граничным условиям. После этого в рамках непрямой гранично-интегральной формулировки можно произвести пересчет хотя бы неизвестных величин на границе тела.

Однако, если наложить любое другое поле, удовлетворяющее условиям равновесия и граничным условиям краевой задачи, то такой пересчет в точках границы так же возможен, хотя полученные поверхностные фиктивные нагрузки и равнодействующая объемных сил будут совершенно иными.

Другими словами, можно прикладывать равнодействующую поля дополнительных объемных сил в любой точке тела.

Теорема *физически* доказана.

Замечание 3. Представляется, что данная теорема применима в тех случаях, когда граничные условия краевой жесткопластической задачи будут отличаться от граничных условий аналогичной линейно-вязкой задачи.

*Замечание 4***.** Очевидно, что теорема будет справедливой и в случае краевых упругопластических задач.

Теорема детерминированности. В этом разделе сделана попытка доказать однозначную определимость (детерминированность) вычисления компонентов тензора напряжений в рамках решения краевой жесткопластической задачи.

Теорема 2. ***Для любой краевой жесткопластической задачи с корректно заданными граничными условиями компоненты тензора напряжений однозначно определяются в любой точке тела в смысле нижней и верхней оценки.***

Определение 1. Под «однозначно определяется» понимается, что искомые величины определяются как решение линейного алгебраического уравнения или системы линейных алгебраических уравнений.

Определение 2. Под нижней оценкой понимается получение искомых величин при помощи решения краевой задачи методом статики.

Определение 3. Под верхней оценкой понимается получение искомых величин при помощи решения краевой задачи вариационным методом.

Доказательство.

1. Следуя доказательству теоремы 2 (или теоремы 5), сформулируем краевую жесткопластическую задачу и получим систему (9) – (11). Данная линейная относительно фиктивных поверхностных и объемных нагрузок система интегральных уравнений при помощи дискретизации методом граничных элементов с достаточной точностью может быть преобразована в систему линейных алгебраических уравнений. Далее решим систему (9) – (11) относительно фиктивных нагрузок.

2. Поскольку при формулировке краевой задачи была принята линейно-вязкая среда, то решение внутри тела получается суперпозицией вкладов всех определенных в п.1 фиктивных нагрузок установкой в функции влияния координат точек наблюдения внутри тела. Следовательно, все компоненты тензора напряжения на границе и внутри тела определяются по линейным уравнениям вида (9) – (11). Таким образом, получена нижняя оценка решения.

3. При помощи же уравнений получим компоненты вектора скорости в тех же точках тела.

4. К линейной системе алгебраических уравнений метода фиктивных нагрузок добавляем уравнения для искомых точек внутри тела. При этом в правой части этих уравнений будут уже рассчитанные методом нижней оценки компоненты вектора скорости. Полученную таким образом переопределенную систему алгебраических уравнений будем решать приближенно, вариационным методом наименьших квадратов. Для этого умножим слева правую и левую части алгебраической системы на матрицу, которая является транспонированной исходной. Решим преобразованную систему относительно фиктивных нагрузок.

5. При помощи уравнений (9) – (11) получим компоненты тензора напряжений аналогично п.2 доказательства, но как верхнюю оценку.

Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что теорему 6 можно сформулировать и доказать, но для вектора скорости.

Замечание 2. Это означает также, что детерминированность скоростей и напряжений в рамках краевых жесткопластических задач аналогична детерминированности напряжений и деформаций в теории малых упругопластических деформаций.

Замечание 3. Поскольку теорему 6 можно сформулировать и доказать для краевой упругопластической задачи, то и здесь очевидна детерминированность перемещений и напряжений в смысле условий теоремы 6.

*Замечание 4***.** Поскольку решение краевой задачи получаются, как нижняя и верхняя его оценки, то имеет смысл говорить о точном решении, понимая его как среднее арифметическое, среднее геометрическое или среднее гармоническое полученных выше оценок. Представляется, что этот вопрос требует дополнительных исследований.

Теорема о физической нелинейности. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. ***Для любой краевой пластической задачи с корректно заданными граничными условиями и произвольной реологической зависимостью компоненты тензора напряжений и вектора перемещений (скоростей) однозначно определяются в любой точке тела в смысле нижней и верхней оценки.***

Принимаем все определения теоремы 6.

Определение. Под произвольной реологической зависимостью будем понимать произвольную функцию вида:

$$T = f(material, t^{\circ}, \Omega, \Gamma, H\ ), \qquad (12)$$

т.е. интенсивность касательных напряжений является произвольной функцией материала (включая анизотропию), температуры, степени накопленной деформации сдвига, интенсивности деформации сдвига, интенсивности скоростей деформации сдвига.

Доказательство.

1. Следуя п.1 доказательства теоремы 6 сформулируем краевую жесткопластическую задачу в виде системы (9) – (11). Решим ее относительно поверхностных и объемных фиктивных нагрузок.

2. Поскольку в данной системе уравнения не зависят явно от реологических свойств материала, она будет справедливой для тела с произвольной реологической зависимостью.

3. Следуя п.2 доказательства, определим по известным фиктивным нагрузкам компоненты вектора скорости и тензора напряжений во всех интересующих точках тела. Это будет их нижняя оценка.

4. Следуя п.п. 3 – 5 доказательства теоремы 6, определим **верхнюю оценку тензора напряжений** во всех интересующих точках тела.

5. Таким же образом (поменяв местами напряжения и скорости) определим **верхнюю оценку вектора скорости** в тех же точках тела.

6. И, наконец, проделаем п.п. 1 – 5 доказательства для краевой упругопластической задачи. Здесь используется та же система (9) – (11), но вместо скоростей рассматриваются перемещения.

Теорема доказана.

Заключительные замечания.

Замечание 1. Приведенные выше теоремы так или иначе позволяют обойти проблему существенной физической нелинейности деформируемых сред. Это позволяет линеаризовать краевую задачу. При решении практических задач часто бывает, что сами граничные условия заранее неизвестны и их приходится определять при помощи некоторых итерационных процедур. В этом смысле замечание 3 к теореме 1 следует распространить и на теоремы 2 – 7.

*Замечание 2***.** Кроме того, в рамках метода фиктивных нагрузок коррекция граничных условий сводится к коррекции вектора правой части разрешающей системы линейных алгебраических уравнений. Матрица системы составляется и обращается (преобразовывается) при этом единожды. Каждая такая итерация сводится к умножению обращенной (преобразованной) матрицы на вектор, что представляет собой весьма экономичную процедуру.

Замечание 3. Система уравнений (9) – (11) не содержит никаких характеристик, относящихся к реологическим свойствам деформируемой среды. Это позволяет формулировать и решать краевые пластические задачи без заранее известной *полной* информации о реологических свойствах деформируемой среды. Представляется, что для получения достаточного по точности решения нужно знать *средний по объему* предел текучести.

*Замечание 4***.** При использовании решений Кельвина для скоростей необходимо задавать условную вязкость. Если рассматривается идеально-жесткопластическая среда ($\sigma_{\text{T}} = const$), то условную вязкость стоит задавать, как отношение предела текучести на сдвиг к средней по объему тела интенсивности скорости деформации сдвига. При заданной реологической зависимости нужно поступить так же, но задавая предел текучести, как функцию средней по объему степени и скорости деформации.

Выводы.

1. Показано, что существует детерминированность определения поля напряжений при решении краевых жесткопластических задач.

2. Показано, что существует однозначное решение краевых жесткопластических задач при произвольной реологической зависимости.

Список литературы

1. Гринкевич В.А., Коноводов Д.В., Кузьмина О.М. Теоретическое обоснование и алгоритм реализации дискретного метода прямого решения краевых задач пластического деформирования // Системні технології. Регіональний межвузівський збірник наукових праць. – Випуск 2 (61). – Дніпропетровськ, 2009. – С. 21–28.

References (transliterated)

1. Grynkevych V.A., Konovodov D.V., Kuz'mina O. Teoreticheskoye obosnovaniye i algoritm realizatsii diskretnogo metoda pryamogo resheniya krayevykh zadach plasticheskogo deformirovaniya [Theoretical substantiation and algorithm of realization of the discrete method of direct solution of boundary value problems of plastic deformation] // Sistemnyye tekhnologii. Regional'nyy mezhvuzivs'kiy zbirnyk nauchnykh prats`. – vol 2 (61). – Dnipropetrovs`k, 2009. – p.p. 21 – 28.

Поступила (received) 09.11.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Гринкевич Владимир Александрович (***Гринкевич Володимир Олександрович, Grynkevych Volodymyr Oleksandrovych***) – доктор технічних наук, професор, Національна металургійна академія України, професор кафедри обробки металів тиском; м. Дніпро, Україна; e-mail: grinkevich@metal-forming.org.ua